

Московский ордена Ленина
Государственный Университет им. М.В. Ломоносова
Научно-исследовательский Институт
Механики и Математики

А.М. МОЛЧАНОВ

КРИТЕРИЙ ДИСКРЕТНОСТИ СПЕКТРА
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ
ВТОРОГО ПОРЯДКА

Диссертация на соискание ученой
степени кандидата Физико-математических наук.

Научный руководитель –
доктор физико-математических наук,
проф. И.М. ГЕЛЬФАНД.

Официальные оппоненты:
академик М.В. КЕЙДИН,
доктор Физико-математических наук,
проф. М.А. НАЙМАРК.

Введение

В теории дифференциальных уравнений существуют две основные точки зрения. Для первой (более ранней по времени) характерно преимущественное внимание к изучению свойств отдельных решений.

Типичными примерами задач, которые ставятся и решаются в этом направлении, являются задачи с начальными данными в теории параболических и гиперболических уравнений, краевая задача и связанные с ней вопросы о характере приближения к краевым значениям в теории эллиптических уравнений.

С другой стороны, можно рассматривать дифференциальное выражение как оператор (быть может, нелинейный) в пространстве функций и изучать свойства этого оператора. Наиболее важные приложения этой точки зрения – метод неподвижной точки и спектральная теория дифференциальных операторов.

Развитие квантовой механики особенно подчеркнуло важность операторного подхода к линейным дифференциальным уравнениям. Было выяснено, что во многих случаях определение спектра линейного дифференциального уравнения является не менее важной задачей для физики, чем изучение отдельных решений. Поэтому возникает потребность научиться прямо исследовать спектр уравнения, обходя гораздо более трудную задачу его интегрирования.

В классической математической физике, где обычно предполагается конечность интервала и ограниченность коэффициентов уравнения, примером такого исследования является вывод асимптотических формул для собственных значений и собственных функций.

В 1909–1910 г. Вейль обобщил теорему разложения по собственным функциям на случай уравнения с особенностями в

коэффициентах или заданного на бескончном интервале.

В отличие от классического уравнения Штурма-Лиувилля, которое всегда имеет дискретный спектр, уравнения, изученные

Вейльем, могут иметь и непрерывный и полосатый спектр и еще более сложный характер спектра. Сам Вейль указал простое достаточное условие дискретности спектра уравнения

$$-y'' + py = \lambda y \quad (I)$$

Это условие состоит в том, что $p(x)$ монотонно стремится к бесконечности, когда $x \rightarrow +\infty$ или $x \rightarrow -\infty$

Доказательство Вейлья основано на теореме Штурма о нулях решений уравнения (1) и не поддается поэтому обобщению на уравнения с частных производных.

Спустя некоторое время после опубликования работ Вейлья, когда развитие квантовой механики вновь пробудило интерес к вопросу о спектре дифференциальных уравнений, в печати появилось большое количество статей, посвященных изучению характера спектра. В частности, по вопросу о дискретности спектра следует отметить две работы.

Фридрихс (3) обобщает, несколько усиливая, теорему Вейлья о дискретности спектра на случай уравнения

$$-\frac{d}{dx} P \frac{dy}{dx} + qy = \lambda y$$

Для случая $P=1$, $\tau=1$ условие Фридрихса состоит в том, что $q \rightarrow +\infty$ (не требуется монотонности). Метод доказательства основывается на общем критерии дискретности спектра полуограниченного оператора, опубликованном впервые

Фелмюлем (8).

Фелмюль (6) изучает спектр уравнения

$$-\Delta \psi = \lambda \psi \quad (II)$$

с нулевыми граничными условиями в областях специального вида, названных им "полутрубками" (*Halbtröhren*)

Релмус устанавливает достаточное условие дискретности спектра уравнения (II). Это условие состоит в следующем.

Будем рассматривать сечения области (которая предполагается вытянутой вдоль оси ∞_n) плоскостями $x_n = \rho$. Пересечение E_ρ есть ограниченная область $(n-1)$ -мерного пространства. Обозначим через $e(\rho)$ наименьшее собственное значение уравнения (II), рассматриваемого только в этом сечении.

Условие **Релмуса** состоит в том, что

$$e(\rho) \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad \rho \rightarrow \infty$$

При этом условии^{x)} доказывается дискретность спектра уравнения II.

Релмус указывает, что его условие выполнено, если одна из сторон параллелепипеда, об'емлющего сечение E_ρ , стремится к нулю, когда $\rho \rightarrow \infty$.

Доказательство, как и в работе **Фридрихса** основано на общем критерии дискретности спектра полуограниченного оператора. Критерий формулируется **Релмусом** в этой его работе в общем виде.

Настоящая работа также посвящена выяснению условий, при которых дифференциальные операторы имеют дискретный спектр.

В результате исследования оказывается, что при весьма общих предположениях — ограниченность снизу коэффициента в уравнении — для дифференциальных операторов второго порядка удается

x) Отметим, что вместо условия

$$e(\rho) \rightarrow \infty$$

достаточно было бы потребовать, чтобы

$$\int_{\rho}^{\rho+\delta} e(\rho) d\rho \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad \rho \rightarrow \infty$$

для любого $\delta > 0$.

найти необходимые и достаточные условия дискретности спектра.

Изложим кратко содержание работы.

В § 1 доказывается необходимое и достаточное условие дискретности спектра оператора

$$Ly = - \frac{d^2y}{dx^2} + py$$

это условие состоит в том, что

$$\int_{\mathcal{D}} p(x) dx \rightarrow +\infty$$

когда отрезок \mathcal{D} , сохранив длину, уходит в $+\infty$ или в $-\infty$. Относительно $p(x)$ предполагается, что $p(x)$ ограничена снизу.

Следующие параграфы (до § 7 включительно) посвящены уравнению в частных производных

$$-\Delta \Psi + p\Psi = \lambda \Psi, \quad (\text{III})$$

заданному во всем пространстве R_n .

В § 2 доказана важная вспомогательная теорема, относящаяся к уравнению (III). Смысл этой теоремы легче всего понять, обратившись к квантово-механической интерпретации уравнения (III), как уравнения движения частицы в потенциальном поле

Тогда теорема § 2 означает, что наличие или отсутствие в пространстве непроницаемых для частицы перегородок не может изменить дискретного характера спектра^{x)}.

Это обстоятельство существенно облегчает исследование, так как введение непроницаемых перегородок разбивает систему на не-

x) Нужно только, чтобы размеры областей, выделяемых перегородками, не стремились к нулю. Допустим, например, целочисленная решетка.

взаимодействующие подсистемы. Спектр такой системы получается наложением спектров отдельных подсистем и будет дискретным тогда и только тогда, когда низшие энергетические уровни подсистем не накапливаются на конечном отрезке энергий.

В § 3 приведен пример, выясняющий важное отличие одномерного случая от многомерного. В одномерном случае дискретность спектра эквивалента тому, что средняя потенциальная энергия стремится к бесконечности. В многомерном этого оказывается недостаточно.

Смысл указанного обстоятельства состоит в том, что закрепление струны в одной точке разбивает ее на две независимые системы и приводит к сильному повышению ее основного тона. Что же касается двумерной мембранны, то закрепление ее в одной точке или даже в небольшом кружке не приводит к сильному повышению тона. Повышения тона можно добиться только закреплением мембранны по множеству, имеющему достаточно большую протяженность, например, по отрезку.

Для уравнений это означает, что в n -мерном пространстве существуют множества, на которых можно как угодно сильно изменить коэффициент $p(x_1, \dots, x_n)$ в уравнении III, и одновременно это изменение приведет лишь к небольшому изменению низшего собственного значения.

Такие несущественные множества исследуются в § 4, и оказывается, что это множества небольшой емкости.

В § 5 и § 6 доказывается необходимое и достаточное условие дискретности спектра, которое в § 7 формулируется в форме, удобной для применений.

Для того чтобы уравнение имело дискретный спектр, необходимо и достаточно, что бы интеграл от функции $p(x_1, \dots, x_n)$

по кубу \mathfrak{D} с несущественным вырезом /см. определение
п § 7/ F стремится к бесконечности

$$\int_{\mathfrak{D}-F} p \, dv \rightarrow +\infty$$

когда куб \mathfrak{D} , сохраняя размер уходит в бесконечность,
а F произвольные изменяется.

Таким образом, если спектр недискретен, то найдется
счетная последовательность одинаковых непересекающихся ку-
бов \mathfrak{D}_n , для которых

$$\int_{\mathfrak{D}_n-F_n} p \, dv \leq C$$

где F_n — несущественные вырезы куба \mathfrak{D}_n .

Это условие необходимо и достаточно для недискретности
спектра.

Совершенно аналогичным образом в § 8 разбирается воп-
рос о спектре неограниченной мембрани.

Выясняется, что спектр мембрани тогда и только тогда буд-
дет дискретным, когда она содержит счетное число одинаковых
непересекающихся кубов. Следует только иметь в виду, что в
общем случае из каждого куба нужно выбросить множество малой
смкости.

Если граница мембрани достаточно гладкая /имеет ограни-
ченную кривизну/, то последняя оговорка излишня.

В § 9 рассмотрен разностный аналог дифференциальных
уравнений в частных производных. Ответ оказывается более
простым, чем для дифференциальных уравнений: для того, чтобы
спектр уравнения был дискретным, необходимо и достаточно,

чтобы коэффициент p_{i_1}, \dots, i_n стремился к бесконечности,
когда $|i_1| + |i_2| + \dots + |i_n| \rightarrow +\infty$

Автор пользуется случаем принести глубокую благодарность
своему руководителю проф. И.М. Гельфанду.

S 1 .

Критерий дискретности спектра полуограниченного
оператора Штурм-Лиувилля.

В настоящем параграфе будут выяснены условия, при которых
дифференциальный оператор второго порядка L

$$L \psi = - \frac{d^2 \psi}{dx^2} + p(x) \psi, \quad (1.1)$$

заданный на всей прямой, имеет дискретный спектр.

Исследования основаны на следующем общем критерии дискрет-
ности спектра.

Дискретность спектра положительно-определенного оператора A

$$(A\psi, \psi) \geq (\psi, \psi)$$

эквивалентна компактности множества векторов ψ , для кото-
рых

$$(A\psi, \psi) \leq 1$$

Этот легко доказываемый критерий опубликован впервые
Релльхом ()

В применении к оператору L критерий означает, что если

$$p \geq 1 \quad (1.2)$$

то дискретность спектра оператора L эквивалентна компактности семейства \mathcal{L} кусочно-гладких функций ψ , для которых

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\left(\frac{d\psi}{dx} \right)^2 + p\psi^2 \right] dx \leq 1 \quad (1.3)$$

Для семейства функций, определяемого неравенством (1.3) можно доказать следующую теорему:

Теорема 1. Для того, чтобы семейство \mathcal{L} , задаваемое неравенством (1.3) с $p \geq 1$, было некомпактно, необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность $\{\Phi_n\}$ непересекающихся отрезков одинаковой длины D , для которых

$$\int_{\Phi_n} p(x) dx < C \quad (1.4)$$

Доказательство. Пусть (1.4) выполнено. Покажем, что \mathcal{L} некомпактно. Построим последовательность функций:

$$y_n(x) = \sin \frac{\pi}{D}(x - a_n) \text{ при } x \in \Phi_n \text{ и } y_n(x) = 0 \text{ при } x \notin \Phi_n$$

где a_n левый конец Φ_n , а D его длина, по предположению не зависящая от " n ".

Эти функции имеют одинаковый интеграл квадрата функции и одинаковый интеграл квадрата производной, так как получается одна из другой просто сдвигом вдоль оси x -ов. Кроме того они попарно ортогональны, так как отрезки Φ_n попарно не пересекаются. Из условия (1.4) ясно, что можно подобрать общий для всех y_n множитель так, чтобы получить последовательность функций, удовлетворяющих условию (1.3). Так как эта последовательность некомпактна, то тем более все \mathcal{L} некомпактно.

Пусть, наоборот, \mathcal{L} некомпактно. Докажем, что существует последовательность $\{\Phi_n\}$, удовлетворяющая условию (1.4).

По теореме 2 Дополнения А существует $\varepsilon > 0$, такое, что для любого N найдется функция $y(x)$ семейства \mathcal{L} , для которой

$$\int_{|x|>N} y^2 dx > \varepsilon \quad (1.5)$$

ε , конечно, меньше 1, так как $y \in \mathcal{L}$ и, значит, в силу (1.2), даже $\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 dx < 1$

Разобьем полупрямые $(-\infty, -N)$ и $(N, +\infty)$ на отрезки \mathfrak{D} длины D . Тогда по крайней мере для одного из этих отрезков будет выполнено неравенство

$$\int_{\mathfrak{D}} \left[\left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + p y^2 \right] dx \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathfrak{D}} y^2 dx \quad (1.6)$$

Действительно. Если бы для всех отрезков выполнялось противоположное неравенство, то, сложив эти неравенства и учитывая, что $y \in \mathcal{L}$, мы получили бы

$$1 > \frac{1}{\varepsilon} \int_{|x|>N} y^2 dx$$

что противоречит (1.5).

Следовательно, для любого D найдется отрезок \mathfrak{D} длины D , расположенный вне интервала $(-N, +N)$, для которого выполнено неравенство (1.6). Рассмотрим функцию $y(x)$ на \mathfrak{D} и нормируем ее условием:

$$\int_{\mathfrak{D}} y^2 dx = D \quad (1.7)$$

Тогда в силу (1.6) получим:

$$\int_{\mathcal{D}} \left[\left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + p y^2 \right] dx \leq \frac{D}{\varepsilon} \quad (1.8)$$

Равенство (1.7) показывает, что среднее значение квадрата $y'(x)$ равно единице. Оценим величину минимального значения $y^2(x)$ на отрезке \mathcal{D} . В токдество

$$y(x) - y(\xi) = \int_{\xi}^x y'(t) dt$$

применим к правой части неравенство Буняковского и используем (1.8). Получим

$$|y(x) - y(\xi)| \leq \frac{D}{\sqrt{\varepsilon}} \quad (1.9)$$

так как мы могли разбить полуоскиме $(-\infty, -N)$ и $(N, +\infty)$ на отрезки любой длины, то D можно считать любым числом. Положим, в частности, $D = \frac{1}{4} \sqrt{\varepsilon}$. Тогда из (1.9) следует, что

$$|y(x)| \geq \frac{3}{4}$$

вокругу на \mathcal{D} , а из неравенства (1.8) получится, что

$$\int_{\mathcal{D}} p(x) dx < 1$$

Так как N произвольное число, а длина \mathcal{D} зависит только от ε , то можно найти счетную последовательность непересекающихся \mathcal{D} с этим свойством.

Следовательно, теорема доказана в обе стороны.

В доказательстве было того факта, что среднее значение квадрата функции равно 1, а интеграл квадрата производной достаточно мал, было выведено, что функция по модулю остается не слишком малой на целом отрезке. Это важное свойство функций

одного переменного перестает быть справедливым для функций многих переменных, что ведет к значительным усложнениям условий дискретности спектра.

В одномерном случае из теоремы 1 критерий дискретности спектра получается для тех операторов L_* , для которых $p \geq 1$. Но если заметить, что дискретность спектра оператора L_* и условие (1.4) теоремы 1 не зависят от уменьшения или увеличения $p(x)$ на любую константу, то критерий дискретности получится для любого L_* , у которого $p(x)$ ограничена снизу.

Сформулируем этот критерий.

Теорема II. Если $p(x) \geq C$, то необходимым и достаточным условием дискретности спектра оператора L_* является условие, чтобы для отрезка \mathcal{D} любой длины,

$$\int_{\mathcal{D}} p(x) dx \rightarrow \infty,$$

когда отрезок \mathcal{D} , сохранив длину, уходит в $+\infty$ или $-\infty$.

Если интерпретировать оператор L_* , как оператор Гамильтона некоторой квантово-механической системы, то критерий дискретности допускает простое физическое истолкование. Он означает, что частица будет совершать финитное движение тогда и только тогда, когда средняя потенциальная энергия неограниченно возрастает с увеличением $|x|$.

§ 2.

Прицип локализации

Для дифференциальных операторов второго порядка с частными производными не получается критерия дискретности спектра в той простой форме, в какой он доказан в одномерном случае.

Поэтому возникает задача отыскания правильной формы критерия дискретности. В настоящем параграфе будет доказана теорема, позволяющая свести задачу к оценке наименьшего собственного значения оператора, заданного на кубе. Формулировка этой теоремы, имеющей самостоятельный интерес, подсказываетя квантово-механической интерпретацией оператора .

Изложение ради наглядности ведется для двумерного случая. Обобщение на „ n “-мерный не представляет никакого затруднения.

Как и в одномерном случае, исходим из общего критерия дискретности спектра, который для плоскости формулируется так

Если $p\psi_{xy} \geq 1$, то дискретность спектра оператора L

$$L \psi = - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) + p \psi \quad (2.1)$$

эквивалентна компактности (в смысле нормы гильбертова пространства¹⁾) семейства L кусочно-гладких функций ψ , определенного неравенством

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + p \psi^2 \right] dx dy \leq 1 \quad (2.2)$$

Для того, чтобы иметь возможность сформулировать теорему, необходимо дать два определения. Рассмотрим на плоскости квадрат D со стороной D и сожмем с ним два числа $\lambda(D)$ и $\mu(D)$ следующим образом:

$$\mu(D) = \inf \int_D \left[(\operatorname{grad} \psi)^2 + p \psi^2 \right] dv \quad (2.3)$$

\inf берется по всем функциям ψ , для которых

$$\int_D \psi^2 dv = 1 \quad (2.4)$$

$\lambda(\mathcal{D})$ определяется аналогичным образом:

$$\lambda(\mathcal{D}) = \inf \int_{\mathcal{D}} [(\text{grad } \psi)^2 + p\psi^2] dv, \quad (2.5)$$

но \inf берется по тем функциям ψ , удовлетворяющим равенству (2.4), которые, кроме того, равны нулю на границе квадрата.

Сформулируем теперь основную теорему настоящего параграфа.

Теорема II. Для того чтобы спектр оператора L не был дискретным, необходимо и достаточно, чтобы существовала счетная последовательность $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_n, \dots$ попарно непересекающихся квадратов одинаковых размеров, для которых

$$\lambda(\mathcal{D}_n) < \text{Const} \quad (2.6)$$

Замечание. Теорема остается справедливой, если в ее формулировке заменить $\lambda(\mathcal{D})$ на $\mu(\mathcal{D})$, что будет видно из хода доказательства.

Прежде чем доказывать теорему, приведем ее квантово-механическое истолкование. Допустим, что квадрат \mathcal{D} окружен стенками, через которые частица не может пройти. Тогда ее состояние описывается функцией, равной нулю на границах \mathcal{D} . Поэтому $\lambda(\mathcal{D})$ означает просто низкий уровень энергии, которую может иметь частица, заключенная в квадрат \mathcal{D} .

Пусть теперь мы имеем последовательность квадратов $\{\mathcal{D}_n\}$ окружных непроницаемыми стенками (граничные условия $\psi = 0$ на границе \mathcal{D}_n).

Так как частицы не могут выйти из \mathcal{D}_n , то спектр такой системы получается простым наложением спектров отдельных частиц. В этом случае ясно, что для дискретности спектра необходимо и достаточно, чтобы низшие уровни энергии отдельных частиц не накапливались.

Теорема III утверждает, что внесение непроницаемых стенок

не изменяет дискретности спектра. Еще более важным и интересным является обратное утверждение. Если система с перегородками имела дискретный спектр, то он останется дискретным и после снятия перегородок.

Перейдем к доказательству теоремы.

Если (2.6) выполнено, то по определению $\lambda(\mathcal{D}_n)$ найдется функция Ψ_n , исчезающая вне \mathcal{D}_n и такая, что

$$\int_{\mathcal{D}_n} \Psi_n^2 dv = 1,$$

а

$$\int_{\mathcal{D}_n} [(\operatorname{grad} \Psi_n)^2 + p \Psi_n^2] dv < C$$

Так как \mathcal{D}_n не пересекаются, то Ψ_n попарно ортогональны.

Поэтому $\frac{\Psi_n}{\sqrt{C}}$ образуют некомпактную последовательность, принадлежащую \mathcal{L} . Следовательно, по общему критерию спектр недискретен.

Пусть, наоборот, спектр недискретен. Тогда \mathcal{L} некомпактно, и в силу леммы Дополнения 1, существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого N найдется функция Ψ , принадлежащая \mathcal{L} и удовлетворяющая неравенству

$$\int \Psi^2 dv > \varepsilon \quad (2.7)$$

$|x| + |y| \geq N$

Покроем область $|x| + |y| \geq N$ непересекающимися квадратами со стороной D и занумеруем как-нибудь эти квадраты.

Так как Ψ принадлежит \mathcal{L} , то для нее выполнено неравенство (2.2). Это неравенство только усилится, если интеграл брать не по всей плоскости, а только по сумме квадратов \mathcal{D}_n .

Поэтому

$$\sum_n \int_{\mathcal{D}_n} [(\operatorname{grad} \Psi)^2 + p \Psi^2] dv \leq 1$$

Но из определения $\mu(\mathcal{D})$ следует, что

$$\int_{\mathcal{D}} [(\operatorname{grad} \psi)^2 + p\psi^2] dv \geq \mu(\mathcal{D}) \int_{\mathcal{D}} \psi^2 dv$$

для любой функции ψ .

Поэтому

$$\left(\sum_n \int_{\mathcal{D}_n} \psi^2 dv \right) \cdot \inf_n \mu(\mathcal{D}_n) \leq \sum_n \int_{\mathcal{D}_n} [(\operatorname{grad} \psi)^2 + p\psi^2] dv \leq 1$$

Но так как

$$\sum_n \int_{\mathcal{D}_n} \psi^2 dv \geq \int_{|x|+|y| \geq N} \psi^2 dv > \varepsilon$$

то окончательно получаем:

$$\inf \mu(\mathcal{D}_n) < \frac{1}{\varepsilon}$$

Последнее неравенство означает, что существует квадрат, для которого

$$\mu(\mathcal{D}) < \frac{1}{\varepsilon} \quad (2.8)$$

Но так как N можно выбрать как угодно большим, то, значит, можно найти счетную последовательность квадратов любого наперед заданного размера, которые попарно не пересекаются и для каждого из которых выполнено неравенство (2.8).

Применяя неравенство (с.4) Дополнения С, получаем, что для этой последовательности

$$\lambda(\mathcal{D}_n) < 2^{11} \left[\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{D^2} \right]$$

Это последнее неравенство, где D означает сторону квадратов последовательности \mathcal{D}_n , завершает доказательство теоремы.

Свойство, выраженное этой теоремой, естественно назвать принципом локализации, так как это свойство означает, что в дискретности спектра можно судить по поведению локальных характеристик.

Ясно, что такая возможность исследовать уравнение на отдельных кубах, не заботясь о том, что делается вне их, существенно упрощает исследование.

§ 3.

Пример оператора Δ с недискретным спектром.

Как уже указывалось выше, для уравнений в частных производных дискретность спектра не следует из условия

$$\int_{\Omega} p d\nu \rightarrow \infty \quad (3.1)$$

являющегося простейшим обобщением условия в одномерном случае.

Нашей ближайшей задачей будет построение примера, показывающего причину недостаточности условия (3.1). Из этого примера станет ясно, как следует изменить условие (3.1), чтобы оно стало необходимым и достаточным.

Перед построением примера укажем его основную идею.

Рассмотрим в R_n функцию Ψ , определяемую равенством

$$\Psi = \frac{b^{n-2}}{r^{n-2}} \cdot \frac{r^{n-2} - a^{n-2}}{b^{n-2} - a^{n-2}} \quad a \leq r \leq b \quad (3.2)$$

где

$$r = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

Это — гиперболическая в шаровом слое $a \leq r \leq b$ функция, изменяющаяся в нем от 0 до 1.

Интеграл квадрата градиента этой функции легко вычисляется.

Он равен

$$\int (\operatorname{grad} \psi)^2 dv = (n-2) \omega_n \frac{\alpha^{n-2}}{1 - \left(\frac{\alpha}{6}\right)^{n-2}} \quad (3.3)$$

где ω_n означает поверхность единичной сферы „ n “-мерного пространства.

Этот интеграл может быть сделан как угодно малым выбором достаточно маленького α .

Следовательно, в пространстве, в отличие от прямой, возможны функции, которые вырастают от 0 до 1 и интеграл Дирихле которых сколь угодно мал.

Подобные функции существуют и на плоскости, в чем легко убедиться рассматривая функцию

$$\psi = \frac{1}{\ln \frac{r}{\alpha}} \ln \frac{r}{\alpha}$$

Аналогичным образом можно построить функции, которые сколь угодно часто обращаются в нуль. Возьмем для этого куб D и разместим внутри его большое число попарно не пересекающихся шаров. Радиусы этих шаров обозначим b_i . Поместим внутри каждого такого шара концентрический шар радиуса a_i . В полученном шаровом слое построим функцию типа (3.2). Допределим нашу функцию на всем D , положив ее равной нулю внутри шаров и равной единице во всех точках, не принадлежащих ни одному из шаров b_i .

Шары b_i выберем такими, чтобы сумма их объемов была не больше половины объема куба D . Тогда, если обозначить построенную функцию через φ ,

$$\int_D \varphi^2 dv \geq \frac{1}{2} D^n, \quad (3.4)$$

где D означает сторону D . Действительно, шары b_i за-

нимают по условию не больше половины объема \mathcal{D} , а вне их φ равна единице.

Интеграл Дирихле функции φ равен сумме интегралов по шарам b_i . Но для каждого шара интеграл Дирихле вычисляется по формуле (3.3). Поэтому

$$\int_{\mathcal{D}} (\operatorname{grad} \varphi)^2 d\omega = (n-2) \omega_n \cdot \sum \frac{\alpha_i^{n-2}}{1 - \left(\frac{\alpha_i}{b_i}\right)^{n-2}} \quad (3.5)$$

При заданных b_i , выбором достаточно малых α_i можно эту сумму сделать сколь угодно малой. В частности, можно считать, что

$$\int_{\mathcal{D}} (\operatorname{grad} \varphi)^2 d\omega < 1 \quad (3.6)$$

Существование подобных функций коренным образом отличает многомерные пространства от одномерного.

Теперь становится ясным, как следует строить пример уравнения с недискретным спектром, для которого условие (3.1) выполнено.

Возьмем для этого счетную последовательность одинаковых кубов \mathcal{D}_K . На кубе с номером " K " построим систему шаров b_i таким образом, чтобы любой куб со стороной $\frac{1}{K}$, помещенный где угодно внутри \mathcal{D}_K , содержал хотя бы один из шаров b_i . Ясно, что этого можно добиться, если расположить центры шаров b_i по решетке с длиной периода меньше, чем $\frac{1}{4K}$. После этого выберем радиусы шаров столь малыми, чтобы они не пересекались и их суммарный объем был не больше половины объема \mathcal{D}_K . Помещая, наконец, внутри b_i шары α_i , сделаем их столь малыми, чтобы сумма в правой части равенства (3.5) была меньше 1.

Разобьем теперь R_n на одинаковые кубы и занумеруем их как-нибудь. В \mathcal{D}_K проведем построение системы шаров a_i , b_i так, как это указано выше.

Определим функцию $p(x_1, \dots, x_n)$. Вне шаров a_i положим $p=0$. Внутри шара a_i положим p постоянной, равной обратной величине объема шара a_i , так что

$$\int\limits_{a_i} p dv = 1$$

Ясно, что для функции $p(x_1, \dots, x_n)$ условие (3.1) выполнено, так как если куб \mathcal{D} , сохранив размер, будет уходить в бесконечность, то он будет попадать на \mathcal{D}_K со все более высокими номерами. Шари a_i расположены на \mathcal{D}_K с плотностью один шар на куб со стороной $\frac{1}{K}$. Следовательно, в куб \mathcal{D} по мере его удаления будет попадать как угодно много шаров a_i . Но интеграл от p по каждому из этих шаров равен единице и так как их наберется как угодно много, то

$$\int\limits_{\mathcal{D}} p dv$$

как угодно велик. Т.е. (3.1) выполнено.

Однако спектр уравнения с этой потенциальной энергией недискретен. Действительно, построив на \mathcal{D}_K связанные с ним функции φ_K , мы получим в силу (3.4) и (3.6), что

$$\mu(\mathcal{D}_K) \leq \frac{2}{D^n}$$

($"n"$ — размерность пространства).

Поэтому в силу замечания к теореме III спектр уравнения с построенным выше p не будет дискретным.

Отметим важное обстоятельство.

Так как φ внутри шаров a_i равно нулю, то мы могли положить p внутри a_i как угодно большим и спектр остался бы недискретным. Следовательно, в пространстве R_n ($n \geq 2$) су-

ществуют множества, произвольное изменение функций P на которых не влияет на дискретность или недискретность. В то же время эти множества могут быть такими, что изменение P на них сильно оказывается на среднем значении $P(x_1, \dots, x_n)$ по кубу. Следовательно, условие (3.1) нужно изменить таким образом, чтобы оно не зависело от поведения $P(x_1, \dots, x_n)$ на этих несущественных множествах.

§ 4.

Нашей ближайшей задачей является выяснение структуры множеств, поведение потенциала $P(x_1, \dots, x_n)$ на которых не влияет на факт дискретности или недискретности спектра. Пример, рассмотренный в § 3, подсказывает важную особенность этих множеств. Она состоит в существовании функций, вырастающих от нуля на множество до единицы на границе об'емлющего куба, интеграл Дирихле которых невелик. Это обстоятельство наводит на мысль считать величину интеграла Дирихле подобных функций мерой несущественности множества.

Дадим точное определение.

Определение 1. Пусть \mathcal{F} ограниченное замкнутое множество^{x)}. Рассмотрим кусочно-гладкие функции Ψ , каждая из которых равна единице на \mathcal{F} и нуль вне некоторого шара, содержащего \mathcal{F} .

Мерой несущественности множества \mathcal{F} называется нижняя грань интегралов Дирихле таких функций

$$N(\mathcal{F}) = \inf_{\{\Psi\}} \int (\operatorname{grad} \Psi)^2 dv \quad (4.1)$$

x) В дальнейшем рассматриваются только такие \mathcal{F} , которые состоят из конечного числа шаров.

Целью настоящего параграфа является доказательство решающего для дальнейшего обстоятельства:

Несущественные множества — это множества малой емкости.

Более точно будет показано, что определенная выше мера несущественности лишь постоянным множителем отличается от емкости множества.

Исходим из определения емкости в форме, данной, например, в статье Келдыша [5].

Пусть \mathcal{F} замкнутое ограниченное множество, а m вполне аддитивная положительная мера, задающая распределение зарядов на \mathcal{F} . Рассмотрим потенциал распределения U

$$U(P) = \int_{\mathcal{F}} \frac{dm}{(PQ)^{n-2}} \quad (4.2)$$

Максимальный полный заряд распределения, для которого

$$U(P) \leq 1$$

называется емкостью \mathcal{F} .

$$C(\mathcal{F}) = \sup_{U \leq 1} \int_{\mathcal{F}} dm$$

Впрочем [9] была доказана важная теорема, которая для замкнутых множеств \mathcal{F} , состоящих из конечного числа шаров может быть сформулирована следующим образом.

Существует единственная мера, соординированная на \mathcal{F} , для которой

$$\int_{\mathcal{F}} dm = C(\mathcal{F}) \quad (4.5)$$

Потенциал $U(P)$, соответствующий m , равен единице вовду на \mathcal{F} , непрерывен во всем R_n и стремится к нулю, когда $P \rightarrow \infty$.

С помощью этой теоремы Виттера мы докажем, что и $N(\mathcal{F})$ отличаются только постоянным множителем.

Прежде всего из теоремы Дополнения Б следует, что при $n > 2$

$$C(\mathcal{F}) = \frac{1}{(n-2) \omega_n} \int (\operatorname{grad} U)^2 dv \quad (4.6)$$

где ω_n — поверхность единичной сферы n -мерного пространства.

Следовательно, если мы докажем, что интеграл Дирихле функции U реализует минимум интеграла Дирихле среди функций равных 1 на \mathcal{F} и нулю вне шара, содержащего \mathcal{F} , то формула (4.6) дает нам связь между $C(\mathcal{F})$ и $N(\mathcal{F})$.

Итак, покажем, что

$$N(\mathcal{F}) = \int (\operatorname{grad} U)^2 dv \quad (4.7)$$

Прежде всего ясно, что среди функций, равных 1 на \mathcal{F} и нулю вне заданной сферы Σ_R , минимум интеграла Дирихле достигается на гармонической функции U_R , которая равна 0 на Σ_R и 1 на \mathcal{F} . С увеличением R эти функции монотонно растут, оставаясь, однако, все время меньше U . Их интегралы Дирихле монотонно убывают.

Из теорем о гармонических функциях (см. напр. Гильберт-Курант [4], стр. 276-278) следует, что интегралы Дирихле функций U_R сходятся к интегралу Дирихле функции U в каждом конечном шаре, а, значит, и к интегралу Дирихле U во всем пространстве.

Следовательно, (4.7) доказано. Бравнивая (4.6) и (4.7), получаем

$$N(\mathcal{F}) = (n-2) \omega_n C(\mathcal{F}) \quad (4.8)$$

Аналогичные рассмотрения для плоскости приводят к равенству

$$N(\mathcal{F}) = 2\pi C(\mathcal{F}) \quad (4.9)$$

§ 5. Необходимое условие дискретности
спектра

В § 2 было установлено, что условием дискретности спектра является выполнение требования

$$\mu(\Omega) \rightarrow \infty.$$

Если теперь мы сможем дать оценки для $\mu(\Omega)$ через функцию $p(x_1, \dots, x_n)$, то задача установления критерия дискретности спектра будет решена.

Мы видели выше, что не везде поведение p имеет значение для характера спектра. Значит, и для величины $\mu(\Omega)$ не важны значения p на несущественных множествах. Более точно это положение вещей описывается теоремой, которую мы докажем ниже.

Рассмотрим куб D и на нем множество F , имеющее небольшую емкость по сравнению с емкостью всего D . Именно, будем считать, что

$$C(F) < \frac{D^{n-2}}{(4n)^{4n}} \quad (5.1)$$

где D сторона куба D .

Обозначим через \tilde{p} интеграл от $p(x_1, \dots, x_n)$ по множеству $D - F$

$$\tilde{p} = \int_{D-F} p(x_1, \dots, x_n) dv \quad (5.2)$$

Утверждается, что если емкость множества F удовлетворяет неравенству (5.1), то произвольное изменение p на F не может сильно увеличить $\mu(\Omega)$. Имеет место следующее неравенство

$$\mu(\Omega) \leq 4^n \frac{\tilde{p} + (n-2)\omega_n C(F)}{D^n} \quad (5.3)$$

Для доказательства вспомним, что из определения $\mu(\mathcal{D})$ следует неравенство

$$\mu(\mathcal{D}) \leq \frac{\int_{\mathcal{D}} [(\operatorname{grad} \psi)^2 + p\psi^2] dv}{\int_{\mathcal{D}} \psi^2 dv} \quad (5.4)$$

где ψ произвольная функция, определенная на \mathcal{D} .

Рассмотрим теперь меру m , сосредоточенную на \mathcal{F} , для которой

$$C(\mathcal{F}) = \int_{\mathcal{F}} dm$$

и связанный с ней потенциал $U(P)$.

Положив $\psi = 1 - U$ и оценивая $\mu(\mathcal{D})$ по (5.4) с помощью этой функции, мы докажем неравенство (5.3).

Числитель в (5.4) оценивается легко, если вспомнить, что

$$\int (\operatorname{grad} U)^2 dv = (n-2) \omega_n C(\mathcal{F})$$

Так как с другой стороны $\psi = 0$ на \mathcal{F} и $0 \leq \psi \leq 1$ всюду, то

$$\int_{\mathcal{D}} p\psi^2 dv \leq \int_{\mathcal{D}-\mathcal{F}} p dv = \tilde{p}$$

Поэтому для числителя получаем неравенство

$$\int_{\mathcal{D}} [(\operatorname{grad} \psi)^2 + p\psi^2] dv \leq \tilde{p} + (n-2) \omega_n C(\mathcal{F}) \quad (5.5)$$

Значительно труднее оценить знаменатель в (5.4). Для удобства дальнейших выкладок будем считать, что начало координат находится в центре куба \mathcal{D} и рассмотрим куб \mathcal{D}_2 со стороной $2D$ и центром в начале координат. Обозначим через $\chi(P)$ вспомогательную функцию

$$\chi(P) = \frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{2n}$$

для которой

$$\Delta \chi = 1$$

Применяя формулу Остроградского-Грина, получаем

$$\int_{\mathcal{D}_2} \psi dv = \int_{\mathcal{D}_2} (\psi \Delta \chi - \chi \Delta \psi) dv = \int_{\Gamma} \left(\psi \frac{\partial \chi}{\partial n} - \chi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) d\sigma - \int_{\mathcal{T}} \left(\psi \frac{\partial \chi}{\partial n} - \chi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) d\sigma$$

Здесь Γ означает границу \mathcal{D}_2 , \mathcal{D}_2 — пересечение \mathcal{D}_2 с той связной компонентой \mathcal{G} дополнения к \mathcal{F} , которая содержит бесконечно удаленную точку, и, наконец, \mathcal{T} граница \mathcal{G} .

Так как \mathcal{T} есть часть границы \mathcal{F} , то $\psi|_{\mathcal{T}} = 0$, а $\frac{\partial \psi}{\partial n}|_{\mathcal{T}} \geq 0$. Поэтому для интеграла от ψ по \mathcal{D}_2 получаем оценку

$$\int_{\mathcal{D}_2} \psi dv \geq \int_{\Gamma} \left(\psi \frac{\partial \chi}{\partial n} - \chi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) d\sigma$$

Оценивая вспомогательную функцию χ , получаем более сильное неравенство

$$\int_{\mathcal{D}_2} \psi dv \geq \frac{D}{n} \int_{\Gamma} \psi d\sigma - \frac{D^2}{2} \left| \int_{\Gamma} \frac{\partial \psi}{\partial n} d\sigma \right| \quad (5.6)$$

Для продолжения оценки необходимо вспомнить, что такое ψ .

$$\psi(P) = 1 - \int_{\mathcal{F}} \frac{dm(Q)}{(PQ)^{n-2}}$$

Поэтому на границе куба \mathcal{D}_2 , которая всюду удалена от \mathcal{F} не меньше, чем на $\frac{D}{2}$,

$$\psi(P) \geq 1 - \left(\frac{2}{D}\right)^{n-2} \int_{\mathcal{F}} dm = 1 - \left(\frac{2}{D}\right)^{n-2} C(\mathcal{F})$$

Для оценки вида $\int_{\Omega} \psi d\omega$ воспользуемся равенством (E.2) Дополнения E.

Оно дает

$$\left| \int_{\Omega} \psi d\omega \right| = (n-2) \omega_n C(F)$$

Подставляя полученные оценки в (5.6), имеем

$$\int_{D_2} \psi d\nu \geq 2D^n - D^2 C(F) [2^{n-2} + (n-2)\omega_n]$$

Но так как $C(F)$ удовлетворяет неравенству (5.1), то

$$\int_{D_2} \psi d\nu \geq \frac{3}{2} D^n \quad (5.7)$$

Для оценки интеграла от ψ по D воспользуемся теоремой 1 Дополнения В.

В нашем случае основное неравенство, доказанное в этой теореме, дает

$$2^{\frac{n}{2}} \sqrt{\int_D \psi^2 d\nu} \geq \sqrt{\int_{D_2} \psi^2 d\nu} - D 2^{\frac{n-2}{2}} \sqrt{\int_D (\operatorname{grad} \psi)^2 d\nu}$$

Неравенство (5.7) и равенство (E.5) Дополнения E, оценивающее интеграл Дирихле \mathcal{U} через ёмкость F , позволяют получить оценку

$$2^{\frac{n}{2}} \sqrt{\int_D \psi d\nu} \geq D^{\frac{n}{2}}$$

Неравенство Буняковского позволяет из полученной оценки вывести неравенство для знаменателя дроби (5.4)

$$\int_D \psi^2 d\nu \geq \left(\frac{D}{4}\right)^n$$

Вместе с (5.5) это окончательно дает:

$$\mu(D) \leq \frac{\tilde{p} + (n-2)\omega_n C(F)}{\left(\frac{D}{4}\right)^n}$$

где предполагается, что $C(F)$ удовлетворяет неравенству (5.1)

Таким образом неравенство (5.3) доказано. Из этого неравенства в силу теоремы II следует необходимое условие дискретности спектра.

Если спектр оператора L дискретен, то среднее значение потенциальной энергии на кубе Ω с любым несущественным вырезом F стремится к ∞ , когда куб Ω уходит в бесконечность.

Под несущественным вырезом здесь понимается множество, емкость которого удовлетворяет неравенству (5.1).

§ 6.

Достаточное условие дискретности спектра

Перейдем к доказательству достаточного признака дискретности спектра. Но технически удобнее установить эквивалентный ему необходимый признак недискретности спектра.

Предположим поэтому, что оператор L имеет недискретный спектр. Тогда по теореме § 2 найдется счетное число попарно непересекающихся кубов $\{\Omega_n\}$ любого заданного размера, для которых

$$\mu(\Omega_n) < k \quad (6.1)$$

Мы покажем, что если взять последовательность кубов достаточно малого размера (этот размер определяется только константой K), то на каждом из них можно так выделить множество F с емкостью удовлетворяющей неравенству (5.1), что интегралы от ρ по множествам $\Omega_n - F_n$ будут меньше единицы.

Тем самым будет доказано, что сформулированное в конце § 5 необходимое условие дискретности спектра является и достаточным.

Приступая к доказательству, заметим, что по определению $\mu(\mathfrak{D})$, неравенство (6.1) означает существование на каждом кубе \mathfrak{D} функции Ψ , удовлетворяющей неравенству

$$\int_{\mathfrak{D}} [(\operatorname{grad} \Psi)^2 + p \Psi^2] dv \leq k \int_{\mathfrak{D}} \Psi^2 dv$$

Нормируя функцию Ψ условием

$$\int_{\mathfrak{D}} \Psi^2 dv = D^n \quad (6.2)$$

перепишем это неравенство в виде

$$\int_{\mathfrak{D}} [(\operatorname{grad} \Psi)^2 + p \Psi^2] dv \leq k D^n \quad (6.3)$$

Следовательно, условие (6.1) означает, что на каждом кубе существует функция, среднее значение квадрата которой равно 1 и для которой выполнено неравенство (6.3). Если бы можно было в каждом кубе \mathfrak{D} выделить меньший куб Δ (постоянного для всех \mathfrak{D} размера), на котором было бы всюду $|\Psi| > \frac{1}{2}$, то из неравенства (6.3) мы получили бы оценку для интеграла по кубу Δ , и теорема была бы доказана. Но так как существуют как угодно плотные несущественные множества, то такой последовательности кубов Δ_n , вообще говоря, выделить нельзя.

Поступим поэтому так. Обозначим через E множество точек \mathfrak{D} , где $|\Psi| > \frac{1}{4}$. Так как Ψ непрерывна на \mathfrak{D} , то существует число $r > 0$ такое, что колебание Ψ в любой сфере радиуса r меньше $\frac{1}{4}$. Покроем замкнутое множество шарами радиуса r и выберем конечное покрытие. Объединение шаров этого покрытия обозначим через F . Всюду на $\mathfrak{D} - F$ функция Ψ по модулю больше $\frac{1}{4}$, а всюду на F $|\Psi| < \frac{1}{2}$.

Поэтому из неравенства (6.3) получаем

$$\tilde{p} = \int_{\mathfrak{D}-F} p dv \leq 16 k D^n \quad (6.4)$$

Если теперь показать, что при достаточно малых D емкость F будет удовлетворять неравенству (5.1), то теорема будет доказана.

Для доказательства построим функцию

$$\tilde{\Psi} = \begin{cases} |\psi| - \frac{1}{2} & \text{если } |\psi| \geq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{если } |\psi| \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Функция $\tilde{\Psi}$ всегда неотрицательна, а на F равна нулю. Ясно, что

$$\int_{\mathcal{D}} (\operatorname{grad} \tilde{\Psi})^2 dv \leq \int_{\mathcal{D}} (\operatorname{grad} \psi)^2 dv$$

С другой стороны,

$$\int_{\mathcal{D}} \tilde{\Psi}^2 dv = \int_{|\psi| \geq \frac{1}{2}} \psi^2 dv = \int_{\mathcal{D}} \psi^2 dv - \int_{|\psi| < \frac{1}{2}} \psi^2 dv \geq D^n - \frac{1}{4} D^n = \frac{3}{4} D^n$$

Обозначим через $\tilde{\Psi}$ функцию, получающуюся из $\tilde{\Psi}$ нормированием

$$\int_{\mathcal{D}} \tilde{\Psi}^2 dv = D^n$$

Из (6.3) и оценки для $\int \tilde{\Psi}^2 dv$ вытекает, что

$$\int_{\mathcal{D}} (\operatorname{grad} \tilde{\Psi})^2 dv \leq \frac{4}{3} k \mathcal{D}^n \quad (6.5)$$

Напомним, что наша задача состоит в оценке емкости F . В силу результатов § 2 емкость F можно оценить следующим образом. Надо построить функцию, равную единице на F и нуль на какой-нибудь об'емлющей F сфере. Интеграл Дирихле такой функции дает оценку сверху для емкости F .

Функция $1 - \tilde{\Psi}$ равна единице на F и интеграл Дирихле ее достаточно мал, но она определена только в кубе \mathcal{D} и нель-

зя ручаться, что она равна нулю на границе \mathcal{D} .

Поэтому сама функция $\varphi = 1 - \tilde{\Psi}$ непосредственно не может служить для оценки емкости \mathcal{F} . Но при помощи φ мы построим функцию, равную нулю, вне некоторой сферы. Для этого продолжим φ четным образом за пределы \mathcal{D} . Считая, что начало координат в центре \mathcal{D} , определим функцию $f(P)$ равенствами

$$f(P) = \begin{cases} 1 & \text{когда } r = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \leq D \\ \frac{3D-2r}{3D} & \text{когда } D \leq r \leq \frac{3}{2}D \\ 0 & \text{когда } r \geq \frac{3}{2}D \end{cases}$$

Так как эта функция равна 1 во всю на \mathcal{D} и нуль вне сферы радиуса $\frac{3}{2}D$, то произведение $h = f\varphi$ уже может служить для оценки емкости \mathcal{F} . Нужно только оценить интеграл Дирихле этого произведения

$$\int (\operatorname{grad} h)^2 dv \leq 2 \int [f^2 (\operatorname{grad} \varphi)^2 + \varphi^2 (\operatorname{grad} f)^2] dv$$

Заметив, что $|f| \leq 1$

$$|\operatorname{grad} f| \leq \frac{2}{3D} < \frac{1}{D}$$

и что интегрирование распространено не более чем на 3^n кубов, окружающих \mathcal{D} , получаем, что

$$C(\mathcal{F}) < 3^{n+1} \left[\int_{\mathcal{D}} (\operatorname{grad} \varphi)^2 dv + \frac{1}{D^2} \int_{\mathcal{D}} \varphi^2 dv \right]$$

Применяя теорему Дополнения \mathcal{D} ко второму слагаемому в последнем неравенстве и учитывая, что φ и $\tilde{\Psi}$ различаются на константу, а, значит, имеют одинаковый интеграл Дирихле, имеем

$$C(\mathcal{F}) < 4(n+2)3^n k D^n \quad (6.7)$$

При оценке было использовано неравенство /6.5/. Из полученной оценки для емкости \mathcal{F} требуемое утверждение вытекает непосредственно.

Действительно, нам нужно было доказать, что существует \mathcal{F} с емкостью, удовлетворяющей неравенству /5.1/. Но из оценки /6.7/ при достаточно малых D справедливость /5.1/ получается как следствие того, что оценка /6.7/ дает более высокий порядок малости, чем /5.1/.

Если выбрать D настолько малым, чтобы кроме /5.1/ выполнялось еще неравенство $16 k D^n < 1$, то теорема, сформулированная в начале этого параграфа, будет доказана полностью.

S 7 .

Критерий дискретности спектра.

Теоремы, доказанные в §§ 5 и 6 позволяют сформулировать критерий дискретности спектра оператора Δ .

Этот критерий удобнее всего сформулировать используя понятие несущественного выреза:

Определение II.

Множество \mathcal{F} , расположеноное на кубе D , называется несущественным вырезом куба D , если его емкость удовлетворяет неравенству

$$C(\mathcal{F}) \leq \frac{D^{n-2}}{(4n)^{4n}}$$

где n – размерность пространства.

Критерий дискретности спектра.

Для того, чтобы уравнение

$$-\Delta \psi + p\psi = \lambda \psi$$

имело дискретный спектр, необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_{\mathcal{D}-\mathcal{F}} p d\nu \rightarrow +\infty \quad (7.1)$$

когда куб \mathcal{D} , сохраняя размер, уходит в бесконечность, а вырез \mathcal{F} изменяется как угодно, оставаясь несущественным.

Условие /7.1/ должно быть выполнено для кубов любого размера.

Функция p предполагается ограниченной снизу.

Этот критерий непосредственно следует из теорем, доказанных в §§ 5 и 6.

Практически оказывается очень полезным критерий недискретности спектра. Оба критерия легко получаются один из другого, но критерий недискретности нагляднее и проще.

Критерий недискретности спектра.

Если спектр уравнения

$$-\Delta \psi + p\psi = \lambda \psi$$

недискретен, то существует последовательность одинаковых непересекающихся кубов \mathcal{D}_n с несущественными вырезами \mathcal{F}_n , такая, что

$$\int_{\mathcal{D}_n-\mathcal{F}_n} p d\nu < C$$

Обратно, если существует последовательность кубов \mathcal{D}_n со свойством

$$\int_{\mathcal{D}_n} p d\nu < C \quad (7.2)$$

то спектр уравнения недискретен и останется таким после произволь-

ного изменения функции ρ на любых несущественных вырезах \mathfrak{F}_n кубов \mathfrak{D}_n .

Из этого видно, что роль несущественных вырезов аналогична роли множеств меры нуль в теории меры. Поэтому критерий описательно можно сформулировать так:

С точностью до значений ρ на несущественных вырезах, условие /7.2/ необходимо и достаточно для недискретности спектра.

S 8 .

Спектр неограниченной мембранны.

Методы, развитые в предыдущих §§, нигде, по существу, не основывались на том факте, что уравнение задано во всем пространстве. Поэтому критерий, сформулированный в § 7, сохраняет справедливость и для уравнений, заданных в некоторой области. Нужно только, чтобы на границе области были поставлены самоопряженные граничные условия.

Мы остановимся особо на случае уравнения

$$-\Delta \psi = \lambda \psi \quad (8.1)$$

с граничным условием

$$\psi|_{\Sigma} = 0 \quad (8.2)$$

где Σ - граница области \mathcal{U} , в которой задано уравнение /8.1/. Легко проверить, что самоопряженное граничное условие /8.2/ эквивалентно заданию бесконечно-большой потенциальной энергии вне области \mathcal{U} , на которой потенциальная энергия равна нулю.

Таким образом уравнение /8.1/ с граничным условием /8.2/ является предельным случаем уравнения

$$-\Delta \psi + p\psi = \lambda \psi$$

Постому можно было бы доказывать критерий дискретности спектра этого уравнения предельным переходом, устремляя $\rho \rightarrow +\infty$ вне области \mathcal{U} .

Непосредственно ясно, что если область \mathcal{U} содержит счетное множество попарно-непересекающихся кубов одинаковых размеров, то спектр уравнения /8.1/ недискретен. Но если дополнительно закрепить мембрану на несущественных вырезах этих кубов, то спектр попрежнему останется недискретным.

Постому с точностью до несущественных вырезов, недискретный спектр дает те и только те области \mathcal{U} , которые содержат счетное число попарно-непересекающихся одинаковых кубов.

Более точно сформулируем этот факт в следующей теореме.

Теорема. Если уравнение /8.1/, заданное на области \mathcal{U} , имеет недискретный спектр, то существует область \mathcal{U}_1 ($\mathcal{U}_1 > \mathcal{U}$) содержащая счетное число одинаковых непересекающихся кубов, из которой \mathcal{U} получается вычитанием несущественных вырезов как угодно малой меры несущественности.

Наоборот, если область \mathcal{U}_1 содержит указанную последовательность кубов, то после дополнительного закрепления мембранны на любом множестве, являющемся суммой несущественных вырезов этих кубов спектр уравнения /8.1/ останется недискретным.

Из этой общей теоремы можно вывести в частных случаях более простые условия.

Здесь будут сформулированы условия в двух наиболее важных случаях.

Теорема. Если уравнение (8.1) задано на плоскости и дополнение к области Σ связно, то для недискретности спектра этого уравнения необходимо и достаточно, чтобы область Σ содержала счетное число попарно-непересекающихся одинаковых квадратов.

Справедливость этой теоремы легко вытекает из общей теоремы и того факта, что на плоскости множества небольшой емкости ограничены кривыми, сумма длин которых невелика. Поэтому такие множества не могут иметь связных компонент значительных линейных размеров.

В пространстве трех и более измерений множества небольшой емкости ограничены поверхностями небольшой площади, линейные же размеры связных компонент таких множеств могут быть значительны. Поэтому сформулированная выше теорема специфична для плоскости.

Ниже будет сформулирована теорема, в которой за счет дополнительных требований на гладкость границы Σ области Σ получается простое условие недискретности спектра уравнения (8.1), причем эта теорема справедлива в пространстве любой размерности.

Теорема. Если граница Σ области Σ , в которой задано уравнение (8.1), имеет ограниченную кривизну, то для недискретности спектра этого уравнения необходимо и достаточно, чтобы область Σ содержала счетное число попарно-непересекающихся кубов одинаковых размеров.

На доказательство этой последней теоремы основимся несколько более подробно. Достаточность условия очевидна. Докажем необходимость. Пусть уравнение (8.1) имеет недискретный спектр и пусть K максимальная кривизна, которую может иметь граница Σ . По общей теореме можно к области Σ добавить

множество \mathcal{F} с мерой несущественности как угодно малой, так что расширенная область будет содержать счетное число попарно-непересекающихся одинаковых кубов. Без ограничения общности можно считать, что кубы $\tilde{\mathcal{D}}_n$ имеют сторону меньше $\frac{1}{K}$.

Поместим в центре $\tilde{\mathcal{D}}_n$ куб со стороной в три раза меньше и обозначим его просто \mathcal{D}_n . Утверждается, что счетное число из кубов \mathcal{D}_n целиком принадлежит области \mathcal{U} .

Рис.

Допустим, от противного, что все \mathcal{D}_n , кроме конечного числа, имеет общие точки с дополнением к \mathcal{U} . Тогда \mathcal{D}_n обязательно имеет общие точки с Σ .

Рассмотрим пересечение $\tilde{\mathcal{D}}_n$ с Σ . Так как кривизна Σ не больше K , то кусок Σ_n поверхности Σ , лежащий внутри $\tilde{\mathcal{D}}_n$, имеет площадь (в n -мерном случае гиперплощадь) не меньшую чем площадь грани \mathcal{D}_n . Следовательно, емкость Σ_n больше некоторой, вполне определенной заданием K , доли емкости всего $\tilde{\mathcal{D}}_n$.

Это противоречит тому, что мы могли выбрать множество \mathcal{F} с как угодно малой мерой несущественности.

Поэтому теорема доказана.

Совершенно аналогично проводится доказательство сформулированной выше теоремы для плоской мембранны.

§ 9.

Уравнения в конечных разностях

Целью настоящего параграфа является изучение разностного аналога уравнения в частных производных и установление критерия дискретности спектра соответствующего оператора.

Вообще говоря, теория разностных уравнений оказывается более сложной, чем теория дифференциальных. Тем более интересно,

что в данном случае результат оказывается проще, чем для дифференциальных операторов.

Для того, чтобы не загромождать изложение множеством индексов, исследование будет проведено для двумерного случая. Переход к общему случаю не вносит ни в изложение, ни в результат ничего нового.

Итак, рассматривается оператор в гильбертовом пространстве последовательностей с двумя индексами

$$\mathcal{L} \Psi_{i,k} = - \left[(\Psi_{i+1,k} - 2\Psi_{i,k} + \Psi_{i-1,k}) + (\Psi_{i,k+1} - 2\Psi_{i,k} + \Psi_{i,k-1}) \right] + p_{i,k} \Psi_{i,k}$$

Мы предполагаем, что $p_{i,k}$ ограничена сверху, причем для удобства можно считать даже, что $p_{i,k} \geq 1$.

Тогда из общего критерия дискретности спектра полуограниченного оператора заключаем, что дискретность спектра оператора \mathcal{L} эквивалентна компактности семейства последовательностей, для которых

$$\sum_{i,k} \left[(\Psi_{i+1,k} - \Psi_{i,k})^2 + (\Psi_{i,k+1} - \Psi_{i,k})^2 + p_{i,k} \Psi_{i,k}^2 \right] \leq 1 \quad (9.2)$$

Легко видеть, что сумма в левой части (9.2) есть ничто иное, как

$$\sum_{i,k} \Psi_{i,k} \mathcal{L} \Psi_{i,k}$$

Покажем теперь, что справедлив следующий критерий дискретности спектра разностного оператора.

Для того, чтобы оператор \mathcal{L} имел дискретный спектр, необходимо и достаточно, чтобы

$$p_{i,k} \rightarrow +\infty$$

когда $|i| + |k| \rightarrow +\infty$.

Доказательство. Пусть существует последовательность номеров n , для которой $|i_n| + |k_n| \rightarrow +\infty$. Построим счетное

число функций

$$\Psi_{i,k}^{(n)} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{4+c}} & \text{когда } i=i_n, k=k_n \\ 0 & \text{когда } (i, k) \neq (i_n, k_n) \end{cases}$$

Прямой подстановкой убеждимся, что $\Psi_{i,k}^{(n)}$ все удовлетворяют неравенству (9.2). Но так как все они попарно ортогональны и имеют одинаковую норму, то они образуют некомпактную последовательность. Следовательно, по общему критерию условие (9.3) необходимо для дискретности спектра оператора Δ .

Пусть теперь $p_{i,k} \rightarrow \infty$. Тогда из неравенства (9.2) следует, что

$$1 \geq \sum_{|i|+|k|>n} p_{i,k} \Psi_{i,k}^2 \geq (\min_{|i|+|k|>n} p_{i,k}) \cdot \sum_{|i|+|k|>n} \Psi_{i,k}^2$$

Следовательно, для любого ε найдется такое n , что для любой функции $\Psi_{i,k}$, удовлетворяющей (9.2), будет выполнено неравенство

$$\sum_{|i|+|k|>n} \Psi_{i,k}^2 < \varepsilon$$

По теореме 3 Дополнения А заключаем, что семейство функций, определяемое неравенством (9.2), компактно, а, значит, спектр оператора Δ дискретен. Теорема доказана полностью.

Дополнение А

Теорема 1. Дано множество функций, равных нулю вне сферы радиуса R . (Вообще говоря комплекснозначных).

Если для всех функций этого семейства

$$\int (|\operatorname{grad} \psi|^2 + |\psi|^2) dv \leq C^2 \quad (A.1)$$

то это семейство компактно в смысле нормы гильбертова пространства.

Доказательство. Для простоты будем считать, что пространство, в котором заданы функции, двумерно. Обобщение не составляет труда.

Рассмотрим квадрат, об'емлющий наш круг радиуса R .

Функции

$$\varphi_{m,n} = \frac{1}{4L^2} e^{i\frac{\pi}{L}(mx+ny)}$$

($2L$ — сторона квадрата) образуют полную ортонормированную систему на этом квадрате.

Обозначим через $\psi_{m,n}$ коэффициенты Фурье функции ψ по системе $\varphi_{m,n}$.

Из тождества

$(\operatorname{grad}\psi \cdot \operatorname{grad}f) = \operatorname{div}(\psi \operatorname{grad}f) - \psi \Delta f$
подставляя вместо $f = \varphi_{-m,-n}$, и интегрируя по квадрату L , легко получаем

$$(m^2+n^2)\psi_{m,n} = - \int_L (m \frac{\partial \psi}{\partial x} + n \frac{\partial \psi}{\partial y}) \varphi_{-m,-n} dv$$

Отсюда и из неравенства (A.1) получаем, что

$$\sum_{m^2+n^2 > k^2} |\psi_{m,n}|^2 \leq \frac{C^2}{k} \quad (\text{A.2})$$

Неравенство (A.2) означает, что для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое конечномерное пространство (а именно пространство линейных комбинаций тех $\varphi_{m,n}$, для которых $m^2+n^2 \leq k^2$), что все функции семейства (A.1) отстоят не более чем на $\sqrt{\varepsilon}$ от сферы радиуса C этого пространства. Так как ε произвольно, то утверждение теоремы 1 доказано.

Докажем теперь более общее утверждение.

Теорема 2. Пусть семейство комплексно-значных функций таково, что

$$\int (|\operatorname{grad} \psi|^2 + |\psi|^2) d\sigma \leq 1 \quad (A.3)$$

и, кроме того, для всякого ε найдется R такое, что

$$\int |\psi|^2 d\sigma < \varepsilon^2$$

$x^2 + y^2 > R^2$

(A.4)

для любой функции ψ семейства.

Тогда это семейство компактно в смысле нормы гильбертова пространства.

Доказательство проведем, опираясь на доказанную теорему 1. Именно, будет показано, что для всякого ε можно указать семейство, обладающее свойствами, сформулированными в теореме 1, и такое, что все функции нашего семейства отстоят не более чем на ε от семейства теоремы 1. Из этого на основании общих теорем о компактности следует компактность нашего семейства.

Рассмотрим функцию

$$\chi_R(r) = \begin{cases} 1 & 0 \leq r \leq R-1 \\ R-r - \frac{1}{2\pi} \sin 2\pi(R-r) & R-1 \leq r \leq R \\ 0 & r \geq R \end{cases}$$

Эта функция в кольце $R-1 \leq r \leq R$ убывает от единицы на внутренней границе кольца до нуля на внешней. При этом ее первые и вторые производные остаются непрерывными на границе кольца.

Умножим теперь все функции нашего семейства на $\chi_R(r)$. Получится семейство функций, равных нулю вне круга радиуса R . Будем обозначать через f функции этого нового семейства, так что

$$f = \chi_R \psi$$

Так как

$$|\chi_R| \leq 1 \quad \text{и} \quad |\operatorname{grad} \chi_R| \leq 2$$

то

$$|\nabla f|^2 + |f|^2 \leq |\chi_R \operatorname{grad} \psi + \psi \operatorname{grad} \chi_R|^2 + |\psi|^2 \leq 9 (|\operatorname{grad} \psi|^2 + |\psi|^2)$$

Следовательно

$$\int (|\operatorname{grad} f|^2 + |f|^2) dv \leq 9$$

В силу теоремы 1 семейство функций компактно.

Но отклонение f от ψ равно

$$\int |f - \psi|^2 dv \leq \int |\psi|^2 dv$$
$$x^2 + y^2 \geq (R-1)^2$$

и в силу (A.4) это отклонение может быть сделано как угодно малым выбором достаточно большого R .

Значит, и семейство функций ψ компактно.

Теорема 2 тем самым доказана.

Теорема 3. Рассмотрим семейство последовательностей с двумя индексами $\psi_{i,k}$, определяемое неравенством

$$\sum_{i,k} [(\psi_{i+1,k} - \psi_{i,k})^2 + (\psi_{i,k+1} - \psi_{i,k})^2 + \psi_{i,k}^2] \leq 1$$

причем известно, что для всякого ε существует такое N , что

$$\sum_{|i|^2 + |k|^2 > N^2} \psi_{i,k}^2 < \varepsilon^2$$

Тогда это семейство компактно.

Доказательство этой теоремы, на котором мы не останавливаемся, можно провести совершенно аналогично доказательству теоремы 2.

Дополнение В

Теорема 2. Пусть ψ функция, заданная на кубе \mathcal{D} , а \mathcal{D}_h — куб, получавшийся из \mathcal{D} сжатием в $\frac{1}{h}$ раз. Тогда

$$\sqrt{\int_{\mathcal{D}} \psi^2 d\omega} \leq h^{-\frac{n}{2}} \sqrt{\int_{\mathcal{D}_h} \psi^2 d\omega + D \int_h^1 h^{-\frac{n}{2}} dh \sqrt{\int_{\mathcal{D}} |\operatorname{grad} \psi|^2 d\omega}} \quad (\text{B.1})$$

Здесь D — сторона куба \mathcal{D} , а n — размерность пространства.

Для доказательства введем функцию

$$f(h) = \int_{\mathcal{D}} \psi^2(h\xi_1, \dots, h\xi_n) d\xi_1 \dots d\xi_n$$

Ясно, что

$$h^n f(h) = \int_{\mathcal{D}_h} \psi^2 d\omega$$

Оценим $\frac{df}{dh}$

$$\frac{df}{dh} = \int_{\mathcal{D}} 2\psi_h \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \xi_1 + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial x_n} \xi_n \right)_h d\xi_1 \dots d\xi_n$$

Знакок h у скобки и около обозначения функции ψ означает, что вместо аргумента x_i надо подставить $h\xi_i$.

Дважды применяя неравенство Буняковского-Копи, получим

$$\begin{aligned} \left| \frac{df}{dh} \right|^2 &\leq 4 \int_{\mathcal{D}} \psi^2(h\xi_1, \dots, h\xi_n) d\xi_1 \dots d\xi_n \times \\ &\times \int_{\mathcal{D}} (\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2) [(\operatorname{grad} \psi)(h\xi_1, \dots, h\xi_n)]^2 d\xi_1 \dots d\xi_n \end{aligned}$$

Так как

$$\max_{\mathcal{D}} (\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2) \leq D^2$$

а

$$\int_{\mathcal{D}} [(\operatorname{grad} \psi)(h\xi_1, \dots, h\xi_n)]^2 d\xi_1 \dots d\xi_n \leq h^{-n} \int_{\mathcal{D}} (\operatorname{grad} \psi)^2 d\omega$$

то окончательно получаем:

$$\left| \frac{df}{dh} \right|^2 \leq 4f h^{-n} \int_{\mathcal{D}} (\operatorname{grad} \psi)^2 dv \cdot D^2$$

Запишем это неравенство иначе:

$$\left| \frac{d\sqrt{f}}{dh} \right| \leq Dh^{-\frac{n}{2}} \sqrt{\int_{\mathcal{D}} (\operatorname{grad} \psi)^2 dv}$$

Но так как

$$\sqrt{f(1)} - \sqrt{f(h)} = \int_h^1 \frac{d\sqrt{f}}{dh} dh$$

то

$$|\sqrt{f(1)} - \sqrt{f(h)}| \leq D \int_h^1 h^{-\frac{n}{2}} dh \cdot \sqrt{\int_{\mathcal{D}} (\operatorname{grad} \psi)^2 dv}$$

Из этого последнего неравенства утверждение теоремы 1 следует непосредственно.

Дополнение 6.

Рассмотрим на кубе \mathcal{D} уравнение ($\rho \geq 0$).

$$-\Delta \psi + \rho \psi = \lambda \psi \quad (C.1)$$

и обозначим через $\lambda(\mathcal{D})$ наименьшее собственное значение при нулевых граничных условиях.

Через $\mu(\mathcal{D})$ обозначим наименьшее собственное значение при граничных условиях

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial n} \right|_p = 0$$

Как известно, эти два числа суть решения таких вариационных задач

$$\lambda(\mathcal{D}) = \min \int_{\mathcal{D}} [(\operatorname{grad} \psi)^2 + \rho \psi^2] dv \quad (C.2)$$

причем минимум берется по всем исчезающим на границе \mathcal{D} функциям, для которых

$$\int_{\mathcal{D}} \psi^2 dv = 1 \quad (C.3)$$

$\mu(D)$ определяется аналогичным образом:

$$\mu(D) = \min \int_D [(\operatorname{grad} \psi)^2 + p \psi^2] dv$$

но минимум берется уже по всем вообще функциям, удовлетворяющим условию (C.3).

Мы докажем, что эти два числа связаны следующими неравенствами:

$$\mu(D) \leq \lambda(D) \leq 2^{2n+7} [\mu(D) + \frac{1}{D^2}] \quad (\text{C.4})$$

Доказательству подлежит, конечно, только вторая часть неравенства (C.4), так как первая часть вытекает непосредственно из определения $\lambda(D)$ и $\mu(D)$.

Доказательство неравенства (C.4). По определению $\mu(D)$ найдется такая функция ψ , что

$$\int_D \psi^2 dv = 1 \quad (\text{C.3})$$

$$\mu(D) \leq \int_D [(\operatorname{grad} \psi)^2 + p \psi^2] dv \leq \mu(D) + \varepsilon, \quad (\text{C.5})$$

причем такая функция существует для любого $\varepsilon > 0$.

Обратимся теперь к неравенству (B.1), которое справедливо для любой функции ψ , и выберем h настолько близким к 1, чтобы

$$D \int_h^1 h^{-\frac{n}{2}} dh \cdot \sqrt{\int_D (\operatorname{grad} \psi)^2 dv} < \frac{1}{2} \quad (\text{C.6})$$

Для этого достаточно положить

$$h = \max \left(\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{D 2^{\frac{n+2}{2}} \sqrt{\mu(D) + \varepsilon}} \right) \quad (\text{C.7})$$

Если h выбрано таким образом, что из неравенства (B.1) следует, что

$$\int_{\mathcal{D}_h} \psi^2 dv \geq \frac{1}{2^{n+2}} \quad (\text{C.8})$$

Построим в \mathcal{D} функцию χ , которая равна 1 на \mathcal{D}_h и равна нулю на границе \mathcal{D} .

Ясно, что можно построить эту функцию таким образом, чтобы было выполнено неравенство

$$|\operatorname{grad} \chi| \leq \frac{2}{D(1-h)} \quad (\text{C.9})$$

Рассмотрим теперь функцию

$$\varphi = \psi \cdot \chi$$

Так как φ равна нулю на границе \mathcal{D} , то с ее помощью можно оценить $\lambda(\mathcal{D})$

$$\lambda(\mathcal{D}) \leq \frac{\int_{\mathcal{D}} [(\nabla \varphi)^2 + p \varphi^2] dv}{\int_{\mathcal{D}} \varphi^2 dv} \quad (\text{C.10})$$

Оценим отдельно числитель и знаменатель этой дроби. Оценка знаменателя следует непосредственно из неравенства (C.8) и того, что $|\chi| < 1$

$$\int_{\mathcal{D}} \varphi^2 dv \geq \int_{\mathcal{D}_h} \psi^2 dv \geq \frac{1}{2^{n+2}} \quad (\text{C.11})$$

Числитель оценивается несколько сложнее:

$$\begin{aligned} (\operatorname{grad} \varphi)^2 + p \varphi^2 &= (\chi \operatorname{grad} \psi + \psi \operatorname{grad} \chi)^2 + p \chi^2 \psi^2 \leq \\ &\leq (\operatorname{grad} \psi)^2 + 2 |\chi \psi \operatorname{grad} \psi \operatorname{grad} \chi| + \psi^2 (\operatorname{grad} \chi)^2 + p \psi^2 \leq \\ &\leq 2 [(\operatorname{grad} \psi)^2 + p \psi^2 + \psi^2 (\operatorname{grad} \chi)^2] \end{aligned}$$

Поэтому на основании (C.5) и (C.9) получим

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}} [(\operatorname{grad} \varphi)^2 + p \varphi^2] dv &\leq 2 \int_{\mathcal{D}} [(\operatorname{grad} \psi)^2 + p \psi^2] dv + 2 \int_{\mathcal{D}} \psi^2 (\operatorname{grad} \chi)^2 dv \leq \\ &\leq 2 [\mu(\mathcal{D}) + \varepsilon + \frac{4}{D^2(1-h)^2}] \quad (\text{C.12}) \end{aligned}$$

Из (C.7) следует, что

$$\frac{1}{(1-h)^2} \leq 4 + D^2 2^{n+2} [\mu(\mathcal{D}) + \varepsilon] \quad (\text{C.13})$$

Собирая неравенства (C.10), (C.11), (C.12) и (C.13), имеем окончательно

$$\lambda(\mathcal{D}) \leq 2^{2n+7} [\mu(\mathcal{D}) + \varepsilon + \frac{1}{D^2}]$$

Но так как ε произвольно, то неравенство (C.4) доказано.

Дополнение D.

Теорема. Пусть ψ функция, заданная на кубе \mathcal{D} , а $\bar{\psi}$ ее среднее значение

$$\bar{\psi} = \frac{1}{\mathcal{D}} \int_{\mathcal{D}} \psi \, dv$$

Тогда

$$\int_{\mathcal{D}} (\psi - \bar{\psi})^2 \, dv \leq \frac{n}{2} D^2 \int_{\mathcal{D}} (\nabla \psi)^2 \, dv \quad (\text{D.1})$$

где D - сторона куба \mathcal{D} , а n - размерность пространства.

Доказательство. Прежде всего легко проверить, что

$$\int_{\mathcal{D}} (\psi - \bar{\psi})^2 \, dv = \frac{1}{2\mathcal{D}} \int_{\mathcal{D}} \int_{\mathcal{D}} [\psi(P) - \psi(Q)]^2 \, dP \, dQ \quad (\text{D.2})$$

Разность $\psi(P) - \psi(Q)$ запишем в виде криволинейного интеграла от градиента ψ . Пусть координаты точки P суть x_1, \dots, x_n а координаты точки Q - ξ_1, \dots, ξ_n . Тогда

$$\psi(P) - \psi(Q) = \sum_{i=1}^n \int_{\xi_i}^{x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_{i-1}, \lambda_i, \xi_{i+1}, \dots, \xi_n) \, d\lambda_i$$

Из неравенства Коши

$$(\sum_{i=1}^n a_i)^2 \leq n \sum_{i=1}^n a_i^2$$

получаем

$$[\psi(P) - \psi(Q)]^2 \leq n \sum_i \left(\int_{\xi_i}^{x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \, d\lambda_i \right)^2$$

Применим к каждому из интегралов в правой части неравенства Буняковского и учтем, что так как и P и Q принадлежат \mathcal{D} , то $|x_i - \xi_i| \leq D$. Получим

$$[\psi(P) - \psi(Q)]^2 \leq nD \sum_{i=1}^n \int_0^P \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right)^2 d\lambda_i$$

Интегрируя по $\xi_1, \dots, \xi_n, x_1, \dots, x_n$ неравенство для $[\psi'(P) - \psi(Q)]^2$, получаем

$$\begin{aligned} & \iint_{\mathcal{D} \times \mathcal{D}} [\psi(P) - \psi(Q)]^2 dP dQ \leq \\ & \leq nD \sum_i \int_0^D \dots \int_0^P \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right)^2 (x_1, \dots, x_{i-1}, \lambda_i, \xi_{i+1}, \dots, \xi_n) dx_1 \dots dx_{i-1} d\lambda_i d\xi_{i+1} \dots d\xi_n \times \\ & \times \int_0^D \dots \int_0^D d\xi_1 \dots d\xi_i dx_1 \dots dx_n \end{aligned}$$

т.е.

$$\iint_{\mathcal{D} \times \mathcal{D}} [\psi(P) - \psi(Q)]^2 dP dQ \leq nD^{n+2} \int_{\mathcal{D}} (\operatorname{grad} \psi)^2 d\sigma \quad (\mathcal{D}.3)$$

Так как $\mathcal{D} = \mathcal{D}^n$, то неравенство (D.3) вместе с равенством (D.2) дает подлежащее доказательству неравенство (D.1).

Пополнение E

Теорема. Пусть $\mathcal{U}(P)$ потенциал, задаваемый распределением m .

$$\mathcal{U}(P) = \int_{\mathcal{F}} \frac{dm(Q)}{(PQ)^{n-2}} \quad (E.1)$$

Пусть далее Σ — поверхность, содержащая множество \mathcal{F} внутри и не имеющая с \mathcal{F} ни одной общей точки.

Тогда справедлива формула

$$\sum \int \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial n} d\sigma = - (n-2) \omega_n \int_{\mathcal{F}} dm(Q) \quad (E.2)$$

где n — размерность пространства, ω_n — поверхность единичной сферы и $\frac{\partial}{\partial n}$ — дифференцирование по внешней по отношению к Σ нормали.

Доказательство. В интеграл

$$\int_{\Sigma} \frac{\partial U}{\partial n} d\sigma$$

подставим выражение для $\frac{\partial U}{\partial n}$, вытекающее из (E.1):

$$\frac{\partial U}{\partial n} = \int_{\mathcal{F}} \operatorname{grad}_P \frac{1}{(PQ)^{n-2}} dm(Q)$$

После подстановки имеем

$$\int_{\Sigma} \frac{\partial U}{\partial n} d\sigma = \int_{\mathcal{F}} \operatorname{grad}_P \frac{1}{(PQ)^{n-2}} dm(Q)$$

Так как области интегрирования по P и Q не зависят друг от друга, а подинтегральная функция не имеет никаких особенностей (ибо P не равно Q нигде в области интегрирования), то мы вправе перенести порядок интегрирования:

$$\int_{\Sigma} \frac{\partial U}{\partial n} d\sigma = \int_{\mathcal{F}} \left(\int_{\Sigma} \operatorname{grad}_P \frac{1}{(PQ)^{n-2}} d\sigma(P) \right) dm(Q) \quad (\text{E.3})$$

Но теперь внутренний интеграл не зависит от поверхности Σ , лишь бы она содержала точку Q . Возьмем в качестве поверхности единичную сферу, описанную вокруг точки Q . Тогда легко видеть, что

$$\int_{\Sigma} \operatorname{grad}_P \frac{1}{(PQ)^{n-2}} d\sigma(P) = -(n-2) \omega_n$$

Подставив найденное значение в выражение (E.3), мы получим искомое равенство (E.2).

Так как $U(P)$ гармонична вне \mathcal{F} , то используя соотношение

$$\operatorname{div}(U \operatorname{grad} U) = (\operatorname{grad} U)^2 + U \Delta U = (\operatorname{grad} U)^2$$

получаем, учитывая, что на \mathcal{F} $U=1$:

$$\int_{R_n - \mathcal{F}} (\operatorname{grad} U)^2 dV = - \int_T \frac{\partial U}{\partial n} d\sigma \quad (E.4)$$

где T означает границу \mathcal{F} . Объединяя (E.2) и (E.4), получаем важное соотношение

$$\int_{R_n - \mathcal{F}} (\operatorname{grad} U)^2 dV = (n-2) \omega_n \int_{\mathcal{F}} dm(Q) \quad (E.5)$$

В заключение автор приносит глубокую благодарность профессору И.М. Гельфанду за руководство данной работой.

Список литературы
=====

1. Carleman. Arkiv för Mat., Band 24 B No.11
2. Carleman. Sur les équations intégrales singulières
3. Friedrichs. Studies and Essays. K.O. Friedrichs.
Criteria... p.145.
4. Гильберт-Курент. - Методы математической физики, т. II
5. Келдыш. - Успехи математических наук т.УШ. Келдыш
о разрешимости и устойчивости задачи Дирихле.
стр.171. Особенно стр.178-179.
6. Rellich, Studies and Essays. F.Rellich, p.329
7. Левитан. - Разложение по собственным функциям.
8. Rellich, Math. Ann., 118, S.479.
9. Wiener, Phys., t.3 (1924), S.24-51, 127-147.

